הכנת פתרון לבחינת הבגרות במתמטיקה מיום 24.05.18 - שאלון 481 (804)

שאלה מס' 1

א.

		כמה (שעות)	מהירות (קמ"ש)	דרך (ק"מ)
על הכביש	מכונית	1.5	x	$1.5x$
	רונה אופנ"ים	1	y	y
לאורך הכביש	מכונית	$\frac{1}{4}$	x	$\frac{1}{4}x$

$$\begin{cases} 1.5x + y = 126 \\ \frac{1}{4}x = y \end{cases}$$

$$1.5x + 0.25x = 126$$

$$1.75x = 126 \quad / : 1.75$$

$$x = 72 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18$$

תשובה: 72 קמ"ש, 18 קמ"ש.

ב.

	כמה (שעות)	מהירות (קמ"ש)	דרך (ק"מ)
מכונית	t	$72+a$	$72t+at$
רונה אופנ"ים	t	$18-a$	$18t-at$

$$72t + at + 18t - at = 126$$

$$90t = 126$$

$$t = 1.4$$

תשובה: $t = 1.4$ (1.4 שעות = שעה ו- 24 דקות).

שאלה מס' 2

א. מציאת שיעורי הנקודה E:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3$$

$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

תשובה: $E(3,2)$.

ב. מציאת שיעורי הנקודה C:

$C(x,0)$, $E(3,2)$, $B(7,4)$

$EB = BC$

$$\sqrt{(3-7)^2+(2-4)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(0-4)^2}$$

$$16+4 = (x-7)^2+16$$

$$4 = x^2-14x+49$$

$$0 = x^2-14x+45$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm 4}{2} = \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$$

$x_1 = 9$, $x_2 = 5 \rightarrow x_C > x_B$ פתרון זה נפסל כי

תשובה: $C(9,0)$

ג. (1). מציאת שיעורי הנקודה K:

K על הישר EC, נמצא את משוואתו:

$$x_B = x_K = 7$$

$$m_{EC} = \frac{2-0}{3-9} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$y-2 = -\frac{1}{3}(x-3)$$

$$y-2 = -\frac{1}{3}x+1$$

$$y = -\frac{1}{3}x+3$$

נציב $x=7$ (שיעור ה-x של K) במשוואה זו:

$$y = -\frac{1}{3}\cdot 7+3$$

$$y = -2\frac{1}{3}+3$$

$$y = \frac{2}{3}$$

תשובה: $K\left(7,\frac{2}{3}\right)$

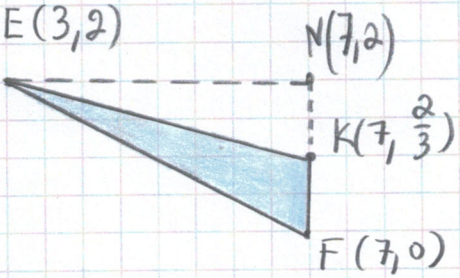
מציאת אורך הקטע KF:

$K(7,\frac{2}{3})$, $F(7,0)$

$KF = y_K - y_F = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

תשובה: $KF = \frac{2}{3}$

(2)



$$S_{\Delta EKF} = \frac{KF \cdot EN}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (X_N - X_E)}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 4}{2} = 1\frac{1}{3}$$

תשובה: $1\frac{1}{3}$ יח"ר

שאלה מס' 3

א. סימון: X - מספר האפרסקים שהיו בסל לפני שסל הוציאה ממנו פירות.

$$\frac{2}{X+2}\cdot\frac{1}{X+1}=\frac{1}{36}$$

$$\frac{2}{X^2+X+2X+2}=\frac{1}{36}$$

$$\frac{2}{X^2+3X+2}=\frac{1}{36} \quad / \cdot 36(X^2+3X+2) \text{ מ"מ}$$

$$72=X^2+3X+2$$

$$0=X^2+3X-70$$

$$X_{1,2}=\frac{-3\pm 17}{2}=\begin{cases}7\\-10\end{cases}$$

$X_1=-10$, $X_2=7$

הפתרון פסול כי $X>0$

תשובה: 7 אפרסקים

ב.

$$P(\text{הפרי השני שהוציאה | סל היה תפוח})=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{9}$$

תשובה: $\frac{2}{9}$

ג. (1)

$$P(\text{סל הוציאה שני | פירות מאותו הסוג})=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{11}{18}$$

תשובה: $\frac{11}{18}$

(2)

$$P(\text{סל הוציאה שני / סל הוציאה שני אפרסקים | פירות מאותו סוג})=\frac{\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{11}{18}}=\frac{21}{22}$$

תשובה: $\frac{21}{22}$

שאלה מס' 4

נתונים:

(1) M - מרכז המעגל.

(2) R - רדיוס המעגל.

(3) $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC$

צ"ל:

(א) BA חוצה זווית במשולש DBC.

(ב) $\Delta CMA \sim \Delta CBD$

(ג) MA קטע אמצעים במשולש DBC.

נתון (4):

ΔABM שווה צלעות.

צ"ל:

(ד) הבע את שטח המשולש CBD ע"י R.

פתרון:

	טענה		נימוק
1.	$\sphericalangle ABD = \alpha$	1.	סימון.
2.	$\sphericalangle AMC = 2\alpha$	2.	טענה 1 + נתון 3.
3.	$\sphericalangle BMA = 180° - 2\alpha$	3.	זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- $180°$, טענה 2.
4.	ΔBMA שווה שוקיים $(MA=MB)$	4.	רדיוסים במעגל שווים זה לזה, נתון 1.
5.	$\sphericalangle ABM = \sphericalangle BAM = x$	5.	משולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות, טענה 4 + סימון.
6.	$x + x + 180° - 2\alpha = 180°$ $2x - 2\alpha = 0$ $2x = 2\alpha \ /:2$ $x = \alpha$	6.	סכום הזוויות במשולש הוא $180°$, טענות 1-5.
7.	BA חוצה זווית במשולש DBC	7.	BA מתלכדת עם הזווית CBD עשתי זוויות שוות, טענה 6.

משולש א'

8. $\sphericalangle DBC = \chi + \alpha = 2\alpha$

9. $\sphericalangle DBC = \sphericalangle AMC = 2\alpha$

10. הצלעות C משותפת למשולש CMA ומשולש CBD.

11. $\Delta CMA \sim \Delta CBD$

מ"ש ג'

12. $CM = MB$

13. $AM \parallel BD$

14. $DA = AC$

15. MA קטע אמצעים ב-ΔBCD

מ"ש ג'

16. $AB = R$

17. $\sphericalangle BAC = 90°$

18. $AB^2 + AC^2 = BC^2$

19. $R^2 + AC^2 = (2R)^2$
$R^2 + AC^2 = 4R^2$
$AC^2 = 3R^2 / \sqrt{}$
$AC = R\sqrt{3}$

20. $AD = R\sqrt{3}$

21. $CD = R\sqrt{3} + R\sqrt{3} = 2R\sqrt{3}$

22. $S_{\Delta BCD} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{R \cdot 2R\sqrt{3}}{2}$
$= \boxed{R^2\sqrt{3}}$

מ"ש ד'

8. חיבור צלעות, שאלות 1 - 6

9. כלל האצבע, שאלות 2 - 8

10. הכוכב הירוק.

11. " - משפט ימין משולשים, שאלות 9 - 10

12. נתונים במשולש שווים לה שלה, נתון 1

13. שני ישרים הנחתכים ע"י ישר שנשמר כך שהצלעות המתאימות שוות מקבילים זה לזה, שאלה 9.

14. ישר התיכה בשני במשולש ומקביל לצלע שלישית הוכח את הצלע השלישית, שאלות 12 - 13.

15. קטע האחבר שתי נקודות אמצע שתי צלעות במשולש הוכו קטע אמצעים במשולש, שאלות 12 - 14.

16. נתון כי ΔABM שווה צלעות, נתון $MA = R$, כי הנקודה M היא מרכז המעגל ולכן $AB = AM = R$.

17. צלעית היקפית הנשענת על הקוטר שווה (נתון כי BC קוטר)

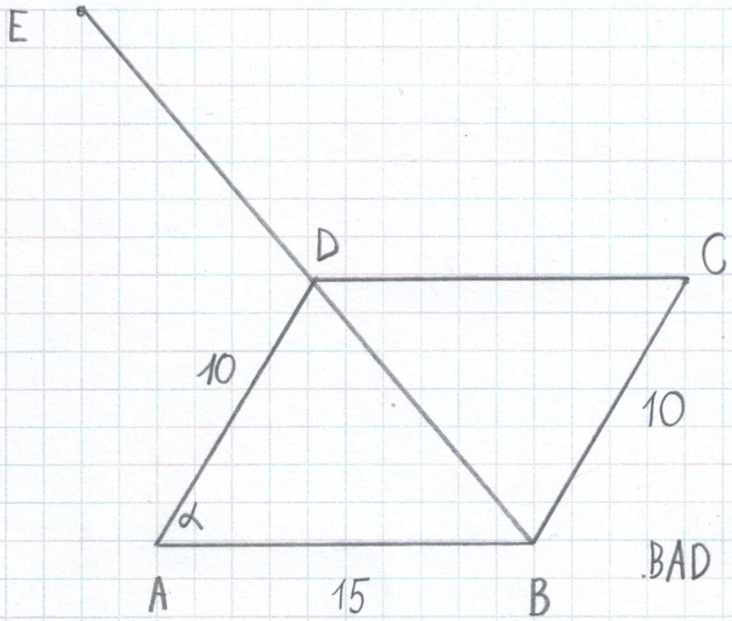
18. משפט פיתגורס ב-ΔABC, שאלה 17.

19. הדמה בשאלה 18: $AB = R$, $BC = 2R$

20. כלל האצבע, שאלות 14 - 19

21. חיבור קטעים, שאלות 19 - 20.

22. נוסחה לחישוב שטח משולש.



שאלה מס' 5

נתון:

(1) $ABCD$ מקבילית.

(2) $AB = 15$.

(3) $BC = 10$.

(4) $\sphericalangle DAB = \alpha$ $(90 > \alpha)$.

ב"ל:

(א) הבע באמצעות α את שטח המשולש BAD.

נתון (5):

שטח המקבילית $ABCD$ הוא $75\sqrt{3}$.

ב"ל:

(ב) חשב את גודל הזווית α.

(ג) חשב את אורך האלכסון BD.

נתון (6):

$ED = DB$

ב"ל:

(ג) (1) מצא את גודל הזווית ABE.

(2) מצא את רבוע המסגל התוסם את המשולש ABE.

פתרון:

(א) $AD = BC = 10$ (מקבילית בצלעות נגדיות שוות, נתון 3).

$$S_{\triangle ABD} = \frac{AD \cdot AB \cdot \sin\sphericalangle DAB}{2} = \frac{10 \cdot 15 \cdot \sin\alpha}{2}$$ (נוסחה טריגונומטרית לחישוב שטח משולש).

$$= 75 \cdot \sin\alpha$$

מש"ל א

(ג). (נוסחה טריגונומטרית לחישוב שטח מקבילית. הסבר: ניתן לשים לב ששטחה של המקבילית גדול פי שניים משטחו של המשולש ABD).

$$\begin{cases} S_{ABCD} = 10\cdot 15\cdot \sin\alpha = 150\sin\alpha \\ S_{ABCD} = 75\sqrt{3} \quad \text{(ניתן 5)} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$75\sqrt{3} = 150\sin\alpha \quad /:150$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\alpha = 60^\circ}$$ (הסרה: $\alpha = 60^\circ$ היא הזווית החדה היחידה המתקיימת עבור נתון 4).

מש"ל ג

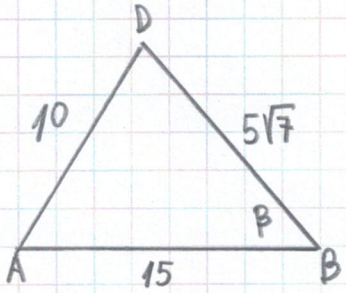
(ב). משפט הקוסינוסים במשולש ABD:

$$BD^2 = 10^2 + 15^2 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot \cos 60^\circ$$

$$BD^2 = 175 \quad /\sqrt{}$$

$$BD = 5\sqrt{7} = 13.229$$, מש"ל ב

(ד). (1). משפט הקוסינוסים במשולש ABD:



$$10^2 = 15^2 + (5\sqrt{7})^2 - 2\cdot 5\sqrt{7}\cdot 15\cdot \cos\beta$$

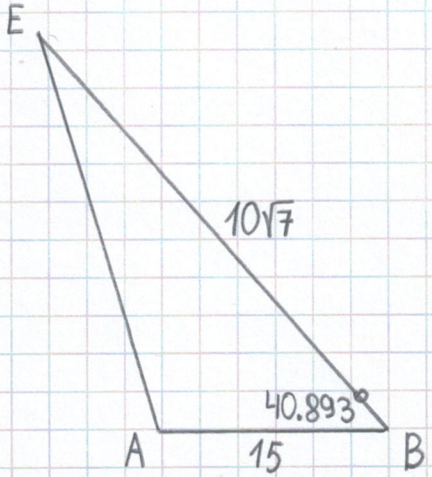
$$100 = 225 + 175 - 150\sqrt{7}\cos\beta$$

$$150\sqrt{7}\cdot\cos\beta = 300 \quad /:150$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\boxed{\beta = 40.893^\circ}$$, מש"ל ד(1)

(2).



$EB = 10\sqrt{7}$ (נתון 6 + מש"ל ב)

משפט הקוסינוסים:

$$EA^2 = 15^2 + (10\sqrt{7})^2 - 2\cdot 15\cdot 10\sqrt{7}\cdot \cos 40.893^\circ$$

$$EA^2 = 324.996 \quad /\sqrt{}$$

$$EA = 18.027$$

משפט הסינוסים:

$$\frac{EA}{\sin 40.893^\circ} = 2R$$

נציב $EA=18.027$ ונקבל:

$$\frac{18.027}{\sin 40.893^\circ} = 2R$$

$$27.537 = 2R \;/:2$$

$$\boxed{R = 13.768}$$

מש"ל ב(2)

שאלה מס' 6

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}+4$

א. (1). תחום הגדרה: $(x-3)^2\neq 0$

$x-3\neq 0$

$x\neq 3$

(2). משוואות האסימפטוטות האנכיות שציירים:

אסימפטוטה אנכית: $x=3$ (מהתבסס על תחום ההגדרה)

אסימפטוטה אופקית: $y=4$ (במבט על $\frac{1}{(x-3)^2}$ המכנה ממעלה גבוהה יותר ולכן הגבול שואף ל-0, 4 מספר חופשי, ולכן $f(x)$ שואפת ל-4 כאשר $x\to\pm\infty$).

(3). תחומי עליה וירידה:

נגזור את הפונקציה $f(x)$ (ספי נוסחת הגזירה למנת שתי פונקציות) באופן הבא:

$$\left.\begin{array}{l} u=1 \\ u'=0 \\ v=(x-3)^2=x^2-6x+9 \\ v'=2x-6=2(x-3) \end{array}\right\}$$

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-2(x-3)\cdot 1}{(x-3)^4}=\frac{-2}{(x-3)^3}$$

$f'(x)=0$

$\frac{-2}{(x-3)^3}=0$

$-2=0$

אין פתרון ולכן אין נקודות קיצון.

נעביר טבלת תחומי עליה וירידה:

תחום עליה: $x<3$

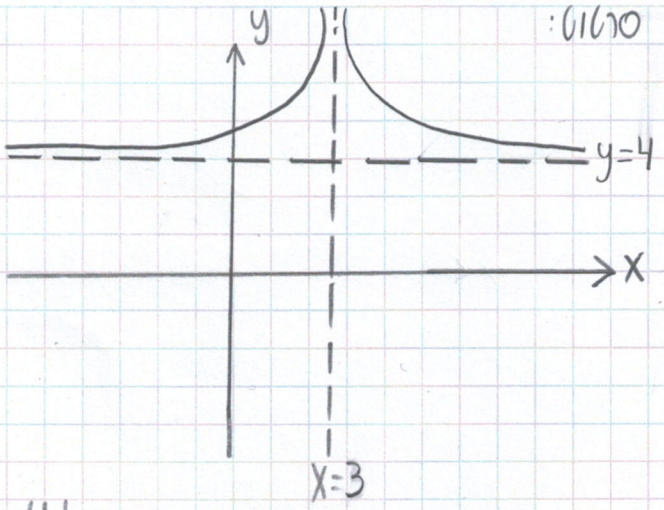
תחום ירידה: $x>3$

x	$x<3$	3	$x>3$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	↗	‖	↘

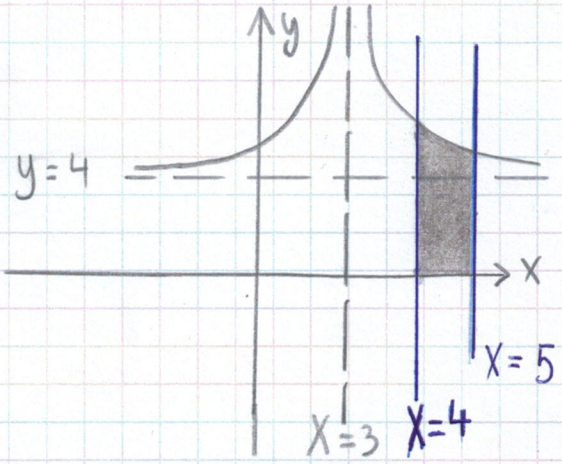
$f'(2)=\frac{-2}{1}=-2<0$

$f'(4)=\frac{-2}{1}=-2<0$

(4) סרטוט:



ב. להלן השטח הנדרש:

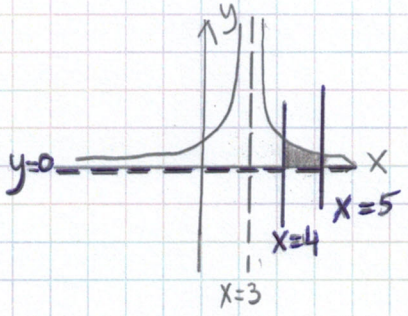


$$S=\int_4^5\left(\frac{1}{(x-3)^2}+4\right)dx=\left[\frac{-1}{x-3}+4x\right]_4^5=$$

$$=\left(\frac{-1}{2}+20\right)-\left(\frac{-1}{1}+16\right)=4.5 \text{ יח"ר}$$

- גבול שמאלי: $x=4$
- גבול ימני: $x=5$
- פונקציה עליונה: $f(x)$
- פונקציה תחתונה: $y=0$
- פונקציית ההפרש: $f(x)$

ג. $g(x)=f(x)-4$ ולכן הגרף של $g(x)$ יהיה הגרף של $f(x)$ שנזיז 4 יחידות כלפי מטה ולכן השטח המבוקש יראה כך:



$$S = \int_4^5 (g(x))dx = \int_4^5 (f(x)-4)\,dx = \int_4^5 \left(\frac{1}{(x-3)^2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{x-3}\right]_4^5 = \left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{יח"ר}$$

- גבול שמאלי: $x=4$
- גבול ימני: $x=5$
- שטח הפונקציה העליונה: $g(x)$
- שטח הפונקציה התחתונה: $y=0$
- פונקציית ההפרש: $g(x)$

שאלה מס' 7

נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\cdot\sqrt{x+a}$, a פרמטר.

א. תחום הגדרה (באמצעות a):

$x+a\geq 0$

$x\geq -a$

ב. מציאת a:

$24=2^3\cdot\sqrt{2+a}$

$24=8\sqrt{2+a}$ /:8

$3=\sqrt{2+a}$ /()²

$9=2+a$

$a=7$

ג. $f(x)=x^3\cdot\sqrt{x+7}$

(1). נקודות חיתוך עם הצירים:

$x=0$:

$f(0)=0^3\cdot\sqrt{0+7}=0$

$(0,0)$

$y=0$:

$0=x^3\cdot\sqrt{x+7}$

$x^3=0$ /$\sqrt[3]{}$, $\sqrt{x+7}=0$ /()²

$x=0$ $x+7=0$

$(0,0)$ $x=-7$

$(-7,0)$

(2). נקודת קיצון ואופן:

נקודת קיצון בקבה:

$x=-7$:

$y=(-7)^3\cdot\sqrt{-7+7}$

$y=0$

$(-7,0)$

נקודות קיצון מקומיות:

נגזור את $f(x)$ לפי נגזרת מכפלת שני שונים כך:

$$\begin{cases} u = x^3 \\ u' = 3x^2 \\ v = \sqrt{x+7} \\ v' = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x+7} + \frac{1}{2\sqrt{x+7}} \cdot x^3$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x+7}}{1} + \frac{x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{2 \cdot 3x^2(x+7) + x^3}{2\sqrt{x+7}} = \frac{7x^3 + 42x^2}{2\sqrt{x+7}} \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

$$7x^3 + 42x^2 = 0 \quad /:7$$

$$x^3 + 6x^2 = 0$$

$$x^2(x+6) = 0$$

$$x^2 = 0 / \sqrt{} \quad , \quad x + 6 = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = -6$$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(-6) = -216$$

$$(0,0) \quad , \quad (-6,-216)$$

$f''(x) = 21x^2 + 24x$ מונה פלסה (המכנה חיובי)

$f''(0) = 0$

ולכן $(0,0)$ לא נקודת קיצון

$f''(-6) = 612 > 0$

ולכן $(-6,-216)$ נקודת מינימום

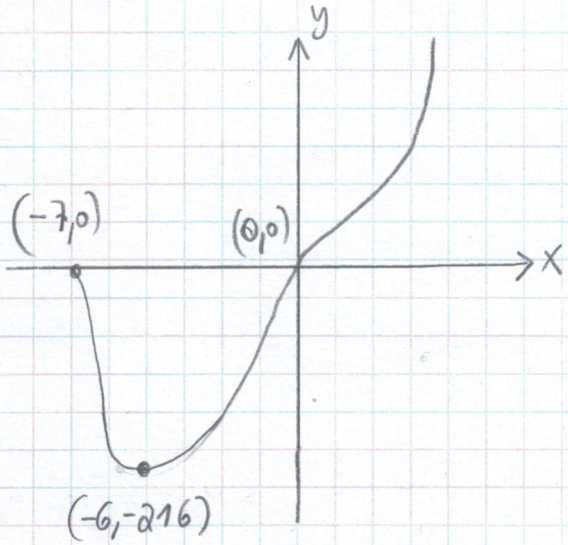
טבלת תחומי עלייה וירידה:

$f'(1) = \frac{49}{+} > 0$

x	$x<0$	0	$0<x<9$	9	$9<x<7$	-7	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$	↗	0	↗	-216	↘	0	

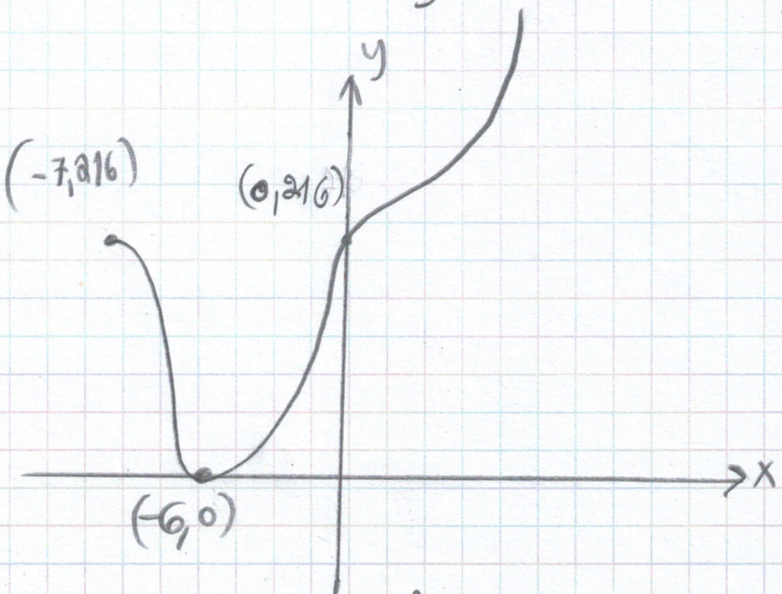
נקודות קיצון: $\max(-7,0)$, $\min(-6,-216)$

(3) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:



(4) תחום חיוביות: $0<x$
תחום שליליות: $-7<x<0$
} בהתבסס על גרף הפונקציה $f(x)$

ג. $C=216$, הסבר: $g(x)=f(x)+C$, אם $C=216$ אז $g(x)=f(x)+216$
ולכן $g(x)$ תהיה בדיוק כגרף של $f(x)$ רק הוסלאתו מעלה 216 יחידות וכך נקודת המינימום $(-6,-216)$ תהיה נקודת החיתוך עם ציר ה-X $(-6,0)$.
לפלן המרכזה של $g(x)$ כאשר $C=216$:



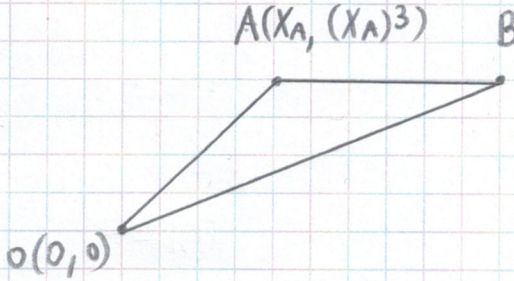
הסתה: אם $C=0$ אז $g(x)=f(x)$ וגרף $g(x)$ משיק לפונקציה $f(x)$ כאשר $x=0$
(כי $f'(0)=0$) ולכן התשובה היא: $C=0$ או $C=216$.

שאלה מס' 8

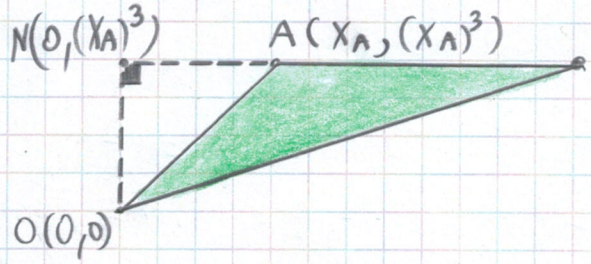
א. A נמצאת על הפונקציה $f(x)=x^3$ ושיעור ה-X של A הוא x_A ולכן שיעור ה-y של A הוא $(x_A)^3$ ולכן $A(x_A,(x_A)^3)$.

AB מקבילים לציר ה-X ולכן שיעורי ה-y של A ו- B שווים ולכן $y_B=(x_A)^3$. B נמצאת על הישר $x=2$ ולכן $B(2,(x_A)^3)$.

להלן משולש ABO:



נצייר עתה את המשולש עם הגובה היוצא מ-O למשכן הבסיס AB, להלן:



$$S_{\Delta ABO}=\frac{AB\cdot ON}{2}=\frac{(x_B-x_A)\cdot(y_N-y_O)}{2}=\frac{(2-x_A)\cdot(x_A)^3}{2}$$

$$S_{\Delta ABO}=\frac{2\cdot(x_A)^3-(x_A)^4}{2}$$

נסמן כעת את שיעור ה-X של A

בהיות t, להלן הפונקציית המטרה

(שטח המשולש AOB כאומן):

$$f(t)=\frac{2t^3-t^4}{2}=\left\{t^3-0.5t^4\right\}_{max}$$

כדי למצוא את t שעבורו שטח המשולש ABO הוא מקסימלי, עלינו למצוא את נקודת המקסימום ולהשוות את הנגזרת ל-0, נעשה כאן:

$$\begin{cases} f'(t) = 3t^2 - 2t^3 \\ f'(t) = 0 \end{cases}$$

$$3t^2 - 2t^3 = 0$$

$$t^2(3-2t) = 0$$

$t^2 = 0$ או $3 - 2t = 0$

$X_A = 0$ — הפתרון נפסל כי נתון $2 > X_A > 0$

$3 = 2t$

$t = 1.5$

$X_A = 1.5$

$y_A = 1.5^3 = 3.375$

$A(1.5, 3.375)$

$f''(t) = 6t - 6t^2$

$f''(1.5) = 9 - 13.5 = -4.5 < 0$

ולכן הנקודה מקסימום.

ב. נציב $t = 1.5$ בפונקציית המטרה:

$f(1.5) = 1.5^3 - 0.5 \cdot 1.5^4 = 0.84375$ יח"ר